

5. Folgerungen

Aus diesem Überblick geht hervor, daß die gesamten experimentellen Ergebnisse über K^+ -Meson-Kern-Streuung unterhalb 200 MeV, ausgenommen vielleicht die mit der Michigan-Blasenkammer gewonnenen Resultate, einfach erklärt werden können mit einer Phasenverschiebung δ_{10} für $T = 1$, $l = 0$,

die ungefähr den Wert *

$$\delta_{10} = -0,8 \eta_{s.s.}$$

hat, ohne daß der andere isobarische Spinzustand und höhere Drehimpulse eine wesentliche Rolle spielen.

Wir danken Herrn Prof. W. HEISENBERG für sein fortwährendes Interesse an unserer Arbeit.

Zur Theorie des heterogenen Piles

Teil I: Der ebene regulär geschichtete Pile

Von KURT MEETZ

Aus der Reaktorstation Karlsruhe *

(Z. Naturforschg. 12 a, 698—709 [1957]; eingegangen am 30. Juni 1957)

Zur Berechnung der kritischen Größe und der räumlichen Verteilung des thermischen Neutronenflusses in einem Pile hat man die Neutronenzahl pro Spaltung ν als tiefsten Eigenwert und die zugehörige Eigenfunktion zu bestimmen. Handelt es sich um einen heterogenen Pile, d. h. sind die Brennelemente in regelmäßigen Abstand im Moderator angeordnet, so benutzt man zur näherungsweisen Berechnung das Homogenisierungsverfahren oder die WIGNER—SEITZSche Zellenmethode. Im Falle eines ebenen, regulär geschichteten Piles kann das Problem exakt gelöst werden. Man erhält $(2N+1)$ Eigenfunktionen und Eigenwerte, wenn $2N+1$ die Anzahl der Brennelemente ist. Von dieser Lösung her wird die Genauigkeit des WIGNER—SEITZ- sowie des Homogenisierungs-Verfahrens untersucht. In einem zweiten Teil werden die exakten Lösungen dazu benutzt werden, Störstellenprobleme im ebenen, regulär geschichteten Pile zu behandeln, während ein dritter Teil die Übertragung der gewonnenen Ergebnisse auf den zweidimensionalen Fall bringen wird.

Die zentrale Aufgabe der Pile-Theorie ist die Berechnung der räumlichen Verteilung des Neutronenflusses Φ (Anzahl von Neutronen/cm² sec) und der kritischen Größe. Sie findet ihre mathematische Formulierung als Eigenwertproblem. Im Fall einer homogenen Verteilung des Brennstoffes im Moderator ist dieses Eigenwertproblem von allereinfachster Form und bedarf keiner Diskussion. Ist dagegen der Brennstoff in Form von Brennelementen heterogen im Moderator verteilt, so ist das Problem schwieriger. Da die Brennelemente im allgemeinen in Form eines regulären Gitters angeordnet sind, hat man zur Behandlung des Eigenwertproblems auf die aus der Gittertheorie der Metalle bekannte WIGNER—SEITZSche Zellenmethode für die SCHRÖDINGER-Gleichung mit periodischem Potential zurückgegriffen, die nichts anderes darstellt als eine Anwendung der FLOQUETSchen Theorie für Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Die hier zugrunde gelegte Annahme, daß die Koeffizientenfunktionen

der Differentialgleichung für den thermischen Neutronenfluß in einem heterogenen Pile periodisch seien, trifft jedoch nur näherungsweise für zentrale, weit vom Rande entfernte Zonen im Brennelementgitter zu. Es besteht somit ein Bedürfnis nach einer genaueren mathematischen Analyse des Problems, zumal im Falle von Störstellen im Brennelementgitter die Theorie in der Nachbarschaft der Störstellen nicht anwendbar ist. Diese Aufgabe ist zuerst von GALANIN¹, FEINBERG² und Mitarbeitern behandelt worden. Sie haben sich allerdings auf eine vorwiegend numerische Behandlung von Brennelementgittern in einem unendlich ausgedehnten Moderator beschränkt, während wir sehen werden, daß sogar im Falle eines endlichen heterogenen Piles eine weitgehende analytische Behandlung möglich ist. Um die mathematische Struktur der Aufgabe kennenzulernen, wollen wir zunächst den ebenen regulär geschichteten Pile eingehend behandeln. In Teil II werden dann Störstellen in diesem Pile untersucht wer-

* Kernreaktor-Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H., Karlsruhe.

¹ A. D. GALANIN, Int. Conf. Atom. Energy, Genf 1955; A/Conf. 8/P/666; u. P/663.

² S. M. FEINBERG, Int. Conf. Atom. Energy, Genf 1955; A/Conf. 8/P/669.



den, während Teil III die Übertragung der Ergebnisse auf den zweidimensionalen Fall behandeln wird.

I. Formulierung des Problems

Der ebene Pile möge sich von $-l$ bis $+l$ erstrecken. Im Moderator (M) des Piles sollen an den Stellen $x = k d$ ($k = -N, \dots, +N$) $2N+1$ Brennstoffsichten (B) der Dicke $2a$ im Abstand d angeordnet sein (Abb. 1). Die Anordnung soll ferner so bemessen sein, daß gilt: $2l = (2N+1)d$.

Im Moderator nehmen wir für den thermischen Fluß Φ eine einfache Diffusionsgleichung an, was voraussetzt, daß d groß gegen die freie Weglänge im Moderator ist:

$$D_M \frac{d^2\Phi}{dx^2} - \Sigma_M \Phi + q(x) = 0 \quad (1)$$

(Σ_M = makr. Absorptionsquerschnitt im Moderator; D_M = Diffusionskonstante des Moderators). Die

Quelldichtefunktion $q(x)$ soll die Anzahl der sekundlich pro Volumeneinheit erzeugten thermischen Neutronen angeben. Wir wollen $q(x)$ mit Hilfe der FERMI-AGE-Theorie darstellen. Liegt bei $x = \xi$ eine Flächenquelle schneller Neutronen von der Intensität $1/cm^2 sec$, so ist im Fall eines unendlich ausgedehnten Moderators

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} \quad (2)$$

(τ = FERMI-Alter eines thermischen Neutrons im Moderator). Die Resonanz-Absorption in den Brennstoffsichten wollen wir hier vernachlässigen. Sie könnte aber leicht berücksichtigt werden, indem man $q(x)$ mit dem p -Faktor multipliziert (p = Resonanzentkommwahrscheinlichkeit). Wir müssen noch für $q(x)$ die Randbedingung $q(-l) = q(+l) = 0$ erfüllen. Dies erreichen wir durch Spiegelung an den Intervallenden, wobei an den Stellen $\xi + 4nl$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) Quellen und Senken an den Stellen $4l(n + \frac{1}{2}) - \xi$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) entstehen:

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi-4nl)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{[x+\xi-4l(n+1/2)]^2}{4\tau}} \right\} \quad (3)$$

ist die Quellverteilung thermischer Neutronen bei einer Flächenquelle schneller Neutronen in $x = \xi$ im Falle unseres endlichen ebenen Piles. Ist nun Σ_f gleich dem makr. Spaltungsquerschnitt des Brennstoffes und v die Anzahl der pro Spaltung entstehenden schnellen Neutronen, so liefert das Brennelement an der Stelle $x = kd$ die Quelldichte:

$$\begin{aligned} q_+(x) &= \int_{-a}^{+a} d\xi \Sigma_f \Phi(\xi + kd) \frac{v}{\sqrt{4\pi\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi-kd-4nl)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{[x+\xi+kd-4l(n+1/2)]^2}{4\tau}} \right\} \\ &\approx 2a \Sigma_f^{\text{eff}} \Phi(kd) \frac{v}{\sqrt{4\pi\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-kd-4nl)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{[x+kd-4l(n+1/2)]^2}{4\tau}} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Dazu tritt die Senkenwirkung des Brennelementes (Σ_B = makr. Absorptionsquerschnitt des Brennstoffs):

$$q_-(x) = \int_{-a}^{+a} d\xi \Sigma_B \Phi(\xi + kd) \delta(x - \xi - kd) \approx 2a \Sigma_B^{\text{eff}} \Phi(kd) \delta(x - kd). \quad (5)$$

Dabei haben wir angenommen, daß der Fluß Φ im Brennelement der Diff.-Gleichung

$$\Phi'' - \chi_B^2 \Phi = 0$$

genügt (χ_B = reziproke Diffusionslänge im Brennstoff). Die Lösung lautet

$$\Phi = \Phi(kd) \exp(\chi_B(x - kd))$$

und also

$$\Sigma_B^{\text{eff}} = \Sigma_B \frac{\sin \chi_B a}{\chi_B a}, \quad \Sigma_f^{\text{eff}} = \Sigma_f \frac{\sin \chi_B a}{\chi_B a} \quad (6)$$

was sicher in guter Näherung gilt, wenn $a \ll d$ (wir wollen in Zukunft unter Wirkungsquerschnitten stets die durch (6) definierten effektiven Querschnitte verstehen und den Index „eff“ wieder weglassen). In

der gleichen Näherung ist (3) so zu verstehen, daß die Brennelemente die Quellverteilung nicht beeinflussen. Nach diesen Annahmen ist nun $q(x)$ völlig bekannt. Nach Summation über alle Brennelemente erhalten wir das in (1) einzusetzende $q(x)$ zu:

$$q(x) = 2a \sum_{k=-N}^{+N} \Phi(kd) \left\{ \frac{\nu \Sigma_f}{\sqrt{4\pi\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-kd-4nl)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{[x+kd-4l(n+1/2)]^2}{4\tau}} \right) - \Sigma_B \delta(x-kd) \right\}. \quad (1a)$$

Damit ist die Aufgabe als Eigenwertproblem für ν definiert, wenn wir die Randbedingungen $\Phi(\pm l) = 0$ hinzunehmen.

II. Lösungsverfahren

Die Lösungen der Gl. (1) lassen sich entwickeln nach den Eigenfunktionen $u_n(x)$ des Operators d^2/dx^2 im Intervall von $-l$ bis $+l$ mit der Randbedingung $u(\pm l) = 0$:

$$\Phi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m(x), \quad (7)$$

denn eine solche Entwicklung ist im Sinne einer absoluten und gleichmäßigen Konvergenz bekanntlich auch dann noch möglich, wenn die dargestellte Funktion mit ihrer ersten Ableitung endlich viele Sprünge macht. Aus der physikalischen Natur des Problems folgt, daß $\Phi(x)$ eine gerade Funktion von x sein muß. Das Orthogonalsystem besteht also aus den Funktionen

$$u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \alpha_m x, \quad \text{wo } \alpha_m = (2m+1) \frac{\pi}{2l}.$$

Setzen wir nunmehr (7) in (1) ein, so erhalten wir nach Multiplikation mit $u_i(x)$ und Integration von $-l$ bis $+l$ ($L_M^2 = D_M / \Sigma_M$):

$$-\left(1 + \alpha_i^2 L_M^2\right) c_i + \frac{2a}{\Sigma_M} \frac{\nu \Sigma_f}{\sqrt{4\pi i}} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sum_{k=-N}^{+N} u_m(kd) \int_{-l}^{+l} dx u_i(x) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| e^{-\frac{(x-kd-4nl)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{[x+kd-4l(n+1/2)]^2}{4\tau}} \right| - \frac{2a \Sigma_B}{\Sigma_M} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sum_{k=-N}^{+N} u_m(kd) u_i(kd) = 0. \quad (8)$$

Nun ist

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-l}^{+l} dx u_i(x) e^{-\frac{(x-kd-4nl)^2}{4\tau}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-l-4nl}^{+l-4nl} dx' u_i(x') e^{-\frac{(x'-kd)^2}{4\tau}},$$

da $u_i(x+4nl) = u_i(x)$

$$\text{und } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-l}^{+l} dx u_i(x) e^{-\frac{[x+kd-4l(n+1/2)]^2}{4\tau}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-l-4l(n+1/2)}^{+l-4l(n+1/2)} dx' u_i(x') e^{-\frac{(x'+kd)^2}{4\tau}},$$

da $u_i(x+4nl+2nl) = -u_i(x)$.

Aus der Summe $\sum_{k=-N}^{+N}$ fassen wir jeweils die Glieder mit $+k$ und $-k$ zusammen zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' u_i(x') e^{-\frac{(x'-kd)^2}{4\tau}} = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \cos \alpha_i x' e^{-\frac{(x'-kd)^2}{4\tau}} = \sqrt{4\pi\tau} e^{-\alpha_i^2 \tau} u_i(kd).$$

Es ergibt sich somit für die c_i das Gleichungssystem:

$$-c_i \left(1 + \alpha_i^2 L_M^2\right) + \sum_{m=0}^{+\infty} c_m \frac{2a}{\Sigma_M} \sum_{k=-N}^{+N} u_m(kd) u_i(kd) \left(\nu \Sigma_f e^{-\alpha_i^2 \tau} - \Sigma_B\right) = 0. \quad (9)$$

Entscheidend geht die symmetrische Matrix $[u_m, u_i] = \sum_{k=-N}^{+N} u_m(kd) u_i(kd)$

in das Gleichungssystem ein. Durch Aufsummation findet man leicht

$$[u_m, u_i] d = \frac{d}{l} \sum_{k=-N}^{+N} \cos \frac{(2m+1)\pi k d}{2l} \cos \frac{(2i+1)\pi k d}{2l} = \frac{d}{2l} \left\{ \frac{\sin(i+m+1)\pi}{\sin \frac{(i+m+1)\pi}{2N+1}} + \frac{\sin(i-m)\pi}{\sin \frac{(i-m)\pi}{2N+1}} \right\}. \quad (11)$$

Die Matrix hat also in den Diagonalen:

$$\begin{aligned} 1+i+m &= n(2N+1), \quad n=1, 2, \dots, \\ i-m &= n(2N+1), \quad n=0, \pm 1, \dots \end{aligned}$$

Einsen stehen und sieht folgendermaßen aus:

$i \backslash m$	0	N	$2N$	$2N+1$	$3N+1$	$4N+1$	$4N+2$
0	1			1 1		1 1	
N		2			2		
$2N$	1		1 1			1 1	
$2N+1$	1		1 1			1 1	
$3N+1$		2			2		
$4N+1$	1		1 1			1 1	
$4N+2$	1		1 1			1 1	

(12)

Wir schreiben (9) nunmehr in der Form:

$$-A_i c_i + \sum_{m=0}^{\infty} c_m [u_m, u_i] d = 0 \quad (13)$$

$$\text{mit } A_i(\nu) = \frac{(1 + \alpha_i^2 L_M^2)}{(\nu \Sigma_f e^{-\alpha_i^2 \tau} - \Sigma_B)} \frac{d \Sigma_M}{2a}$$

$$\text{oder } \sum_{m=0}^{\infty} \{ [u_m, u_i] d - A_i(\nu) \delta_{mi} \} c_m = 0. \quad (14)$$

Betrachtet man die Matrix (12), so sieht man, daß das Gleichungssystem (14) in $(N+1)$ verschiedene Gleichungssysteme zerfällt, in denen jeweils nur die Koeffizienten

$$c_{(2N+1)m+k} \quad (m=0, 1, \dots)$$

$$\text{und } c_{(2N+1)m-(k+1)} \quad (m=1, 2, \dots)$$

auftreten, wo k von $0, \dots, N$ läuft. Bedenkt man ferner, daß

$$\begin{aligned} \alpha_{(2N+1)m-(k+1)} &= [(2N+1)2m - (2k+1)] \frac{\pi}{2l} \\ &= -\alpha_{-(2N+1)m+k}, \end{aligned}$$

$$\text{so daß } \cos \alpha_{(2N+1)m-(k+1)} x = \cos \alpha_{-(2N+1)m+k} x \quad \text{und} \quad A_{(2N+1)m-(k+1)} = A_{-(2N+1)m+k}$$

gilt, und setzt man schließlich

$$c_{(2N+1)m-(k+1)} = c_{-(2N+1)m+k},$$

so lauten die $N+1$ verschiedenen Gleichungssysteme

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (d[u_{(2N+1)m+k}, u_{(2N+1)i+k}] - A_{(2N+1)i+k} \delta_{mi}) c_{(2N+1)m+k} = 0 \quad (15)$$

$$\text{mit } i = -\infty, \dots, +\infty; \quad k = 0, \dots, N.$$

Es resultieren somit $(N+1)$ verschiedene Eigenwertgleichungen:

$$|d[u_{(2N+1)m+k}, u_{(2N+1)i+k}] - A_{(2N+1)i+k} (\nu) \delta_{mi}| = 0 \quad (16)$$

$$\text{mit } k = 0, \dots, N.$$

Man beweist nun leicht, daß (16) bedeutet:

$$\prod_{m=-\infty}^{+\infty} A_{(2N+1)m+k} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m, \quad (17)$$

$$\text{wobei } P_m = \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{+\infty} A_{(2N+1)n+k} \quad \text{ist.}$$

Aus (17) folgen somit die $N+1$ kritischen Gleichungen:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{A_{(2N+1)m+k}} = 1 \quad \text{für } k = 0, \dots, N, \quad (18)$$

es sei denn, irgendein A wäre 0, was stets auf $\nu = \infty$ führt. Es gibt also genau $N+1$ verschiedene Eigenwerte, die symmetrischen Eigenfunktionen zugeordnet sind. Setzen wir (13) ein, so bedeutet (18):

$$\frac{2a}{d \Sigma_M} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu \Sigma_f e^{-\alpha_i^2 (2N+1)m+k \tau} - \Sigma_B}{1 + \alpha_i^2 (2N+1)m+k L_M^2} = 1. \quad (19)$$

Man berechnet nun leicht aus (15), daß für die Koeffizienten gilt:

$$\frac{c_{(2N+1)m+k}}{c_k} = \frac{A_k}{A_{(2N+1)m+k}} \quad \text{für } k = 0, \dots, N, \quad (20)$$

$$m = -\infty, \dots, +\infty.$$

Die zu (18) gehörigen $N+1$ symmetrischen Eigenfunktionen sind somit:

$$\Phi^{(k)}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha_{(2N+1)m+k} x}{A_{(2N+1)m+k}(\nu_k)} \text{ für } k=0, \dots, N, \quad (21)$$

wo wir so normiert haben, daß $\Phi^{(k)}(0) = 1$.

In völlig analoger Weise können wir weitere N Eigenfunktionen $\Phi^{(-k)}(x)$ ($k=1, \dots, N$) gewinnen, die ungerade sind: $\Phi^{(-k)}(-x) = -\Phi^{(-k)}(x)$. Diese Funktionen sind zunächst physikalisch ohne Interesse, bekommen aber Bedeutung, wenn die Flußverteilung im Pile durch eine Störstelle im Gitter asymmetrisch wird. Wir gewinnen diese Funktionen

mit dem Ansatz

$$\Phi^-(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m u_m^-(x), \quad (22)$$

$$\text{wo } u_m^-(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \beta_m x; \quad \beta_m = \frac{\pi m}{l}.$$

Im Gleichungssystem für die b_m tritt die Matrix auf

$$\begin{aligned} d[u_m^-, u_i^-] &= \frac{d}{l} \sum_{k=-N}^{+N} \sin \frac{m \pi k d}{l} \sin \frac{i \pi k d}{l} \\ &= \frac{d}{2l} \left\{ \frac{\sin(i-m) \pi}{\sin \frac{(i-m) \pi}{2N+1}} - \frac{\sin(i+m) \pi}{\sin \frac{(i+m) \pi}{2N+1}} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Die Matrix sieht folgendermaßen aus:

$i \backslash m$	0	1	N	2N	2N+1	2N+2	3N+1	4N+2
0	0	0		0	0	0		0
1	0	1		-1	0	1		-1
N			1 -1				1 -1	
			-1 1				-1 1	
2N	0 -1			1 0 -1				1
2N+1	0 0			0 0 0				0
2N+2	0 1			-1 0 1				-1
3N+1			1 -1				1 -1	
			-1 1				-1 1	
4N+2	0 -1			1 0 -1				1

Das Gleichungssystem

$$\sum_{m=1}^{\infty} ([u_m^-, u_i^-] d - B_i(\nu) \delta_{mi}) b_m = 0, \quad (25)$$

$$B_m = \frac{(1 + \beta_m^2 L_M^2)}{\nu \Sigma_I e^{-\beta_m^2 \tau} - \Sigma_B} \frac{2a}{d \Sigma_M}$$

wird in gleicher Weise wie oben behandelt. Bedenkt man $\beta_{(2N+1)m-k} = \{(2N+1)m-k\} \frac{\pi}{l} = -\beta_{-(2N+1)m+k}$,

so daß $\sin \beta_{(2N+1)m-k} x = -\sin \beta_{-(2N+1)m+k} x$,
 $B_{(2N+1)m-k} = B_{-(2N+1)m+k}$

und setzt

$$b_{(2N+1)m-k} = b_{-(2N+1)m+k},$$

so zerfällt (25) in N verschiedene Gleichungssysteme:

$$0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (d[u_{(2N+1)m+k}^-, u_{(2N+1)i+k}^-] - B_{(2N+1)i+k} \delta_{mi}) b_{(2N+1)m+k} \quad (26)$$

für $k=1, \dots, N$;
 $i=-\infty, \dots, +\infty$.

Durch die Umordnung treten in der Matrix (24) an die Stelle der (-1) -Elemente ebenfalls $(+1)$ -Elemente. Die Eigenwertgleichungen liefern:

$$\left| d[u_{(2N+1)m+k}, u_{(2N+1)i+k}] - B_{(2N+1)i+k}(\nu) \delta_{mi} \right| = 0 \quad (27)$$

für $k=1, \dots, N$.

Daraus folgt $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{B_{(2N+1)m+k}(\nu)} = 1$. (28)

Aus den N Gleichungen ergeben sich die N Eigenwerte $\nu_{-1}, \dots, \nu_{-N}$. Für die Koeffizienten b gelten die Relationen:

$$\frac{b_{(2N+1)m+k}}{b_k} = \frac{B_k}{B_{(2N+1)m+k}},$$

so daß die N ungeraden Eigenfunktionen lauten:

$$\Phi^{(-k)}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \beta_{(2N+1)m+k} x}{B_{(2N+1)m+k}(\nu_{-k})}. \quad (29)$$

Es gibt also genau $2N+1$ Eigenfunktionen und Eigenwerte. Die Reihenfolge der Eigenwerte, geordnet nach der Größe, lautet:

$$\nu_0, \nu_{-1}, \nu_1, \dots, \nu_{-N}, \nu_N,$$

wie man leicht sieht. Daß das Spektrum endlich ist, erklärt sich daraus, daß es sich nicht um das Spektrum eines Differentialoperators handelt, dem immer eine FREDHOLMSche Integralgleichung mit nicht ausgeartetem Kern zugeordnet ist, sondern um das Spektrum eines Operators, dem eine FREDHOLMSche

Gleichung mit ausgeartetem Kern der Dimension $2N+1$ entspricht.

Aus (1) entnimmt man, daß die zugehörige Integralgleichung lautet:

$$\Phi(x) = \nu \int_{-l}^{+l} A(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi - \int_{-l}^{+l} B(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi, \quad (30)$$

wo

$$A(x, \xi) = \sum_{k=-N}^{+N} F(x, k d) \delta(\xi - k d),$$

$$B(x, \xi) = \sum_{k=-N}^{+N} G(x, k d) \delta(\xi - k d)$$

und

$$F(x, k d) = \frac{2a \Sigma_f}{D_M} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi K(x, \xi) e^{-\frac{(\xi - kd)^2}{4\tau}},$$

$$G(x, k d) = \frac{2a \Sigma_B}{D_M} K(x, k d).$$

$K(x, \xi)$ ist die GREENSche Funktion von $d^2/dx^2 - 1/L_M^2$ in $(-l, +l)$ mit der Randbedingung $K(\pm l, \xi) = 0$.

Versuchen wir nun, zu einer einfacheren Darstellung der Eigenfunktionen zu gelangen, da die unendlichen Reihen noch zu unhandlich sind. Die geraden Eigenfunktionen lauten nach (21) und (13):

$$\Phi^{(k)}(x) = \frac{2a}{d \Sigma_M} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_k \Sigma_f e^{-\alpha_{N_0 m + k}^2 x}}{1 + \alpha_{N_0 m + k}^2 L_M^2} \cos \alpha_{N_0 m + k} x - \frac{2a \Sigma_B}{d \Sigma_M} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha_{N_0 m + k} x}{1 + \alpha_{N_0 m + k}^2 L_M^2} \text{ für } k=0, \dots, N. \quad (31)$$

Die zweite Reihe wollen wir aufsummieren, da sie im Gegensatz zur ersten sehr schlecht konvergiert. Sei: $2N+1=N_0$ und $2k+1=K_0$, so lautet sie

$$S^{(k)}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2N_0 m + K_0) \frac{\pi x}{2l}}{1 + (2N_0 m + K_0)^2 \frac{\pi^2 L_M^2}{4l^2}}. \quad (32)$$

Betrachten wir die meromorphe Funktion

$$F(\zeta) = \frac{\pi}{\sin \pi \zeta} \frac{\cos((2N_0 \zeta + K_0) \frac{\pi x}{2l} - \zeta \pi)}{1 + (2N_0 \zeta + K_0)^2 \frac{\pi^2 L_M^2}{4l^2}}. \quad (33)$$

Die Funktion hat einfache Pole in $\zeta = \pm m$ ($m=0, 1, \dots$) mit den Residuen

$$\text{Res}_{\zeta=m} F(\zeta) = \frac{\cos(2N_0 m + K_0) \frac{\pi x}{2l}}{1 + (2N_0 m + K_0)^2 \frac{\pi^2 L_M^2}{4l^2}}$$

und ferner in

$$\zeta_{1,2} = -\frac{K_0}{2N_0} \pm i \frac{d}{2\pi L_M};$$

es gilt daher:

$$\frac{1}{2\pi\tau} \int_{C_\infty} F(\zeta) d\zeta = S^{(k)}(x) + \underset{\zeta=\zeta_2}{\text{Res}} F + \underset{\zeta=\zeta_1}{\text{Res}} F.$$

Man sieht nun leicht, daß $|\zeta F(\zeta)|$ für $|\zeta| \rightarrow \infty$ ($\Im \zeta \neq 0$) verschwindet, wenn $x = x' + n d$ und $0 \leq x' \leq d$, $n = -N, \dots, +N$. Es gilt daher

$$S^{(k)}(x) = -\underset{\zeta=\zeta_1}{\text{Res}} F - \underset{\zeta=\zeta_2}{\text{Res}} F \quad [n d \leq x \leq (n+1) d]. \quad (34)$$

Aus (33) folgt dann:

$$\begin{aligned} \text{Res } F &= i \frac{d}{4L_M} \frac{\cos\left(i \frac{2x'-d}{2L_M} + \frac{\pi}{2} \frac{K_0}{N_0} (2n+1)\right)}{\sin\left(-i \frac{d}{2L_M} + \frac{\pi}{2} \frac{K_0}{N_0}\right)} \quad [n d \leq x \leq (n+1) d] \\ \text{Res } F &= -i \frac{d}{4L_M} \frac{\cos\left(-i \frac{2x'-d}{2L_M} + \frac{\pi}{2} \frac{K_0}{N_0} (2n+1)\right)}{\sin\left(i \frac{d}{2L_M} + \frac{\pi}{2} \frac{K_0}{N_0}\right)} \quad (0 \leq x' \leq d) \\ \text{Also} \quad -S^{(k)}(x) &= \frac{d}{2L_M} \Im \frac{\cos\left(i \frac{2x'-d}{2L_M} + \frac{\pi}{2} \frac{K_0}{N_0} (2n+1)\right)}{\sin\left(i \frac{d}{2L_M} + \frac{\pi}{2} \frac{K_0}{N_0}\right)} \end{aligned} \quad (35)$$

oder $S^{(k)}(x) = \frac{d}{2L_M} \frac{\Im \frac{x'}{L_M} \cos \frac{K_0 \pi (n+1) d}{2l} - \Im \frac{x'-d}{L_M} \cos \frac{K_0 \pi n d}{2l}}{\mathfrak{Cof} \frac{d}{L_M} - \cos \frac{K_0 \pi d}{2l}} \quad [n d \leq x \leq (n+1) d] \quad (0 \leq x' \leq d). \quad (36)$

Wie man leicht aus (36) entnimmt, gilt auch $S^{(k)}(\pm l) = 0$.

In völlig analoger Weise ergibt sich für $S^{(-k)}(x)$:

$$S^{(-k)}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{2N_0 m + K_0}{2l} \pi x}{1 + (2N_0 m + K_0)^2 \frac{\pi^2 L_M^2}{4l^2}} \quad (K_0 = 2k), \quad (37)$$

$$S^{(-k)}(x) = \frac{d}{2L_M} \frac{\Im \frac{x'}{L_M} \sin \frac{k \pi (n+1) d}{l} - \Im \frac{x'-d}{L_M} \sin \frac{k \pi n d}{l}}{\mathfrak{Cof} \frac{d}{L_M} - \cos \frac{k \pi d}{l}} \quad [n d \leq x \leq (n+1) d] \quad (0 \leq x' \leq d) \quad (k=1, \dots, N). \quad (38)$$

Fassen wir noch einmal zusammen: Unser Problem hat $2N+1$ nicht ausgeartete Eigenwerte und Eigenfunktionen. Zu den geraden Eigenfunktionen:

$$\begin{aligned} \Phi^{(k)}(x) &= \frac{2a}{d\Sigma_M} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_k \Sigma_f e^{-\alpha_{N_0 m+k}^2 \tau}}{1 + \alpha_{N_0 m+k}^2 L_M^2} \cos(2N_0 m + K_0) \frac{\pi x}{2l} \\ &\quad - \frac{2a}{d\Sigma_M} \Sigma_B \frac{d}{2L_M} \frac{\Im \frac{x'}{L_M} \cos \frac{K_0(n+1)\pi d}{2l} - \Im \frac{x'-d}{L_M} \cos \frac{K_0\pi n d}{2l}}{\mathfrak{Cof} \frac{d}{L_M} - \cos \frac{K_0\pi d}{2l}} \quad (39) \\ &\quad (k=0, \dots, N), \quad (0 \leq x' \leq d), \quad [n d \leq x \leq (n+1) d], \quad K_0 = 2k+1 \end{aligned}$$

gehören die Eigenwerte ν_k , die sich bestimmen aus:

$$1 = \frac{2a}{d\Sigma_M} \left\{ \nu_k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\Sigma_f e^{-\alpha_{N_0 m+k}^2 \tau}}{1 + \alpha_{N_0 m+k}^2 L_M^2} - \Sigma_B \frac{d}{2L_M} \frac{\Im \frac{d}{L_M}}{\mathfrak{Cof} \frac{d}{L_M} - \cos \frac{K_0\pi d}{2l}} \right\}. \quad (40)$$

Zu den ungeraden Funktionen

$$\begin{aligned} \Phi^{(-k)}(x) = & \frac{2a}{d\Sigma_M} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_{-k} \Sigma_f e^{-\beta_{N_0 m+k}^2 \tau}}{1 + \beta_{N_0 m+k}^2 L_M^2} \sin(N_0 m+k) \frac{\pi x}{l} \\ & - \frac{2a}{d\Sigma_M} \Sigma_B \frac{d}{2L_M} \frac{\Im \sin \frac{x'}{L_M} \sin \frac{k\pi(n+1)d}{l} - \Im \sin \frac{x'-d}{L_M} \sin \frac{k\pi n d}{l}}{\Im \cos \frac{d}{L_M} - \cos \frac{k\pi d}{l}} \end{aligned} \quad (41)$$

(k = 1, ..., N), \quad (0 \leq x' \leq d), \quad [n d \leq x \leq (n+1) d]

gehören die Eigenwerte ν_{-k} , die sich bestimmen aus:

$$1 = \frac{2a}{d\Sigma_M} \left\{ \nu_{-k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\Sigma_f e^{-\beta_{N_0 m+k}^2 \tau}}{1 + \beta_{N_0 m+k}^2 L_M^2} - \Sigma_B \frac{d}{2L_M} \frac{\Im \sin \frac{d}{L_M}}{\Im \cos \frac{d}{L_M} - \cos \frac{k\pi d}{l}} \right\}. \quad (42)$$

III. Vergleich der Methoden

Von physikalischem Interesse sind lediglich der kleinste Eigenwert ν^0 und die zugehörige gerade Eigenfunktion $\Phi^0(x)$, die überall positiv ist. Wir wollen nun untersuchen, wie genau die gängigen Methoden zur Bestimmung von ν^0 und Φ^0 sind. Nach (31) lautet die Eigenfunktion:

$$\Phi^0(x) = \frac{2a}{d\Sigma_M} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_0 \Sigma_f e^{-\alpha_{N_0 m}^2 \tau} - \Sigma_B}{1 + \alpha_{N_0 m}^2 L_M^2} \cos(2N_0 m + 1) \frac{\pi x}{2l}. \quad (43)$$

Aus dieser Darstellung folgt unmittelbar, daß in Stabpunkten $x = k d$ ($k = -N, \dots, +N$) gilt

$$\Phi^0(k d) = \cos \frac{\pi k d}{2l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_0 \Sigma_f e^{-\alpha_{N_0 m}^2 \tau} - \Sigma_B}{1 + \alpha_{N_0 m}^2 L_M^2} \frac{2a}{d\Sigma_M} \quad (44)$$

oder mit (40) $\Phi^0(k d) = \cos \frac{\pi k d}{2l}$. (45)

Entsprechendes gilt auch für die anderen Eigenfunktionen. Die Flußverteilung in den Stabpunkten genügt also einem einfachen Cos-Gesetz wie die Flußverteilung in einem homogenen Pile.

Den zugehörigen Eigenwert erhalten wir mit (40) aus der Beziehung:

$$\begin{aligned} \Phi^0(0) = 1 = & \frac{2a}{d\Sigma_M} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_0 \Sigma_f e^{-\alpha_{N_0 m}^2 \tau} - \Sigma_B}{1 + \alpha_{N_0 m}^2 L_M^2} \\ = & \frac{2a \Sigma_f}{d\Sigma_M} \nu_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha_{N_0 m}^2 \tau}}{1 + \alpha_{N_0 m}^2 L_M^2} - \frac{2a \Sigma_B}{d\Sigma_M} \frac{d}{2L_M} \frac{\Im \sin \frac{d}{L_M}}{\Im \cos \frac{d}{L_M} - \cos \frac{\pi d}{2l}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Schreiben wir (46) aus, so folgt:

$$\nu_0 \Sigma_f \left\{ \frac{e^{-\alpha_0^2 \tau}}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} + \frac{e^{-\alpha_{2N}^2 \tau}}{1 + \alpha_{2N}^2 L_M^2} + \frac{e^{-\alpha_{2N+1}^2 \tau}}{1 + \alpha_{2N+1}^2 L_M^2} + \dots \right\} = \frac{d \Sigma_M}{2a} + \Sigma_B \frac{\frac{d}{2L_M} \Im \sin \frac{d}{L_M}}{\Im \cos \frac{d}{L_M} - \cos \frac{\pi d}{2l}}. \quad (47)$$

Nun ist

$$\alpha_{2N}^2 = (4N+1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2} \approx (4N+2)^2 \frac{\pi^2}{4l^2} = \frac{4\pi^2}{d^2},$$

und das gleiche gilt für α_{2N+1}^2 . Die Exponentialglieder mit $n=1$ in (43) und (46) gehen also ungefähr wie $\exp(-4\pi^2\tau/d^2)$ und können vernachlässigt werden, wenn gilt:

$$\frac{4\pi^2\tau}{d^2} \gg 1. \quad (48)$$

Dies ist fast immer der Fall; z. B. ist im D₂O $4\pi^2\tau \approx 5 \cdot 10^3$. Entwickeln wir weiterhin die rechte Seite von (47) nach Potenzen von d/L_M und $d/2l$, so erhalten wir die angenäherte Darstellung von (47):

$$\nu_0 \frac{\Sigma_f}{\Sigma_B} \frac{e^{-\alpha_0^2\tau}}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} + \dots = \frac{d \Sigma_M}{2a \Sigma_B} + \frac{1}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} + \frac{1}{12} \left(\frac{d}{L_M} \right)^2 - \frac{1}{720} \left(\frac{d}{L_M} \right)^4 + \frac{1}{240} \left(\frac{d}{L_M} \right)^4 \alpha_0^2 L_M^2 + \dots \quad (49)$$

Betrachten wir nun in der Reihendarstellung (43) die Glieder mit $+m$ und $-m$. Man berechnet leicht die folgenden Näherungsdarstellungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \alpha_{N_0 m}^2 L_M^2} &\approx \frac{1}{1 + \frac{4m^2\pi^2 L_M^2}{d^2}} - \frac{1}{m^3 N_0} \frac{4\pi^2 L_M^2}{d^2}, & \frac{1}{1 + \alpha_{-N_0 m}^2 L_M^2} &\approx \frac{1}{1 + \frac{4m^2\pi^2 L_M^2}{d^2}} + \frac{1}{m^3 N_0} \frac{4\pi^2 L_M^2}{d^2}, \\ e^{-\alpha_{N_0 m}^2 \tau} &\approx e^{-\frac{4m^2\pi^2\tau}{d^2}} \left(1 + \frac{1}{m N_0} \right), & e^{-\alpha_{-N_0 m}^2 \tau} &\approx e^{-\frac{4m^2\pi^2\tau}{d^2}} \left(1 - \frac{1}{m N_0} \right). \end{aligned} \quad (50)$$

Unter der alleinigen Voraussetzung $2N+1 \gg 1$ oder $2l \gg d$ folgt daher aus (43):

$$\Phi^{(0)}(x) \approx \cos \frac{\pi x}{2l} \frac{2a}{d \Sigma_M} \left\{ \frac{\nu_0 \Sigma_f e^{-\alpha_0^2 \tau} - \Sigma_B}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_0 \Sigma_f e^{-\frac{4\pi^2 m^2 \tau}{d^2}} - \Sigma_B}{1 + \frac{4\pi^2 m^2 L_M^2}{d^2}} \cos \frac{2m\pi x}{d} \right\}. \quad (51)$$

In diesem Fall gilt also ein Produktansatz von der Form:

$$\Phi^{(0)}(x) = \cos \frac{\pi x}{2l} \varphi(x), \quad 2l \gg d, \quad (52)$$

wo

$$\varphi(x+d) = \varphi(x)$$

eine periodische Funktion in d ist. Es genügt also, ihren Verlauf in einer Zelle, etwa von $-d/2$ bis $+d/2$ zu bestimmen und sie dann fortzusetzen. Aus (51) folgt ferner, daß sie den Bedingungen genügt:

$$\varphi'(\pm d/2) = 0.$$

Es muß betont werden, daß der Produktansatz geringeren Einschränkungen unterworfen ist als das WIGNER-SEITZ-Verfahren, da er nur verlangt, daß $2l \gg d$.

Das drückt sich auch darin aus, daß er im Falle des unendlichen Piles ($2l \rightarrow \infty$) die exakte Lösung $\varphi(x)$ liefert. Das WIGNER-SEITZ-Verfahren verlangt darüber hinaus: $4\pi^2\tau/d^2 \gg 1$, so daß wir aus (51) erhalten:

$$\Phi_{WS}^{(0)}(x) = \cos \frac{\pi x}{2l} \frac{2a}{d \Sigma_M} \left\{ \frac{\nu_0 \Sigma_f e^{-\alpha_0^2 \tau} - \Sigma_B}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} - 2 \Sigma_B \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2m\pi x}{d}}{1 + \frac{4\pi^2 m^2 L_M^2}{d^2}} \right\} 2l \gg d; \frac{4\pi^2\tau}{d^2} \gg 1. \quad (53)$$

$$\text{Es ist also: } \varphi_{WS}(x) = \frac{2a}{d \Sigma_M} \left\{ \frac{\nu_0 \Sigma_f e^{-\alpha_0^2 \tau} - \Sigma_B}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} - 2 \Sigma_B \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2m\pi x}{d}}{1 + \frac{4\pi^2 m^2 L_M^2}{d^2}} \right\}. \quad (54)$$

Den Wert der Reihe entnehmen wir aus (36) für $K_0 = 2k+1 = 0$ und erhalten:

$$\varphi_{WS}(x') = \frac{2a}{d \Sigma_M} \left\{ \frac{\nu_0 \Sigma_f e^{-\alpha_0^2 \tau} - \Sigma_B}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} - \Sigma_B \left(\frac{\frac{d}{2L_M} \left(\operatorname{Si} \frac{x'}{L_M} - \operatorname{Si} \frac{x'-d}{L_M} \right)}{\operatorname{Co} \frac{d}{L_M} - 1} - 1 \right) \right\} \quad (0 \leq x' \leq d). \quad (55)$$

Die kritische Gleichung in der WIGNER–SEITZ-Methode erhalten wir nun in völliger Analogie zu (46), indem wir setzen:

$$\Phi_{\text{WS}}^{(0)}(0) = 1 \quad \text{also} \quad \varphi_{\text{WS}}(0) = 1. \quad (56)$$

Man erkennt, daß der Eigenwert ν_{WS}^0 sich aus dem Zelleneigenwertproblem bestimmt.

$$\text{Gl. (56) liefert} \quad \nu_{\text{WS}}^0 \frac{\Sigma_f}{\Sigma_B} \frac{e^{-\alpha_0^2 \tau}}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} = \frac{d \Sigma_M}{2a \Sigma_B} + \frac{1}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} + \frac{\frac{d}{2L_M} \sin \frac{d}{L_M}}{\mathfrak{Cof} \frac{d}{L_M} - 1} - 1 \quad (57)$$

oder nach Entwicklung nach Potenzen von d/L_M

$$\nu_{\text{WS}}^0 \frac{\Sigma_f}{\Sigma_B} \frac{e^{-\alpha_0^2 \tau}}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} = \frac{d \Sigma_M}{2a \Sigma_B} + \frac{1}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} + \frac{1}{12} \left(\frac{d}{L_M} \right)^2 - \frac{1}{720} \left(\frac{d}{L_M} \right)^4 + \dots . \quad (58)$$

Setzt man (57) in (55) ein, so folgt

$$\varphi_{\text{WS}}(x') = 1 + \frac{2\alpha \Sigma_B}{d \Sigma_M} \frac{\frac{d}{2L_M} \left(\sin \frac{d}{L_M} - \sin \frac{x'}{L_M} + \sin \frac{x' - d}{L_M} \right)}{\mathfrak{Cof} \frac{d}{L_M} - 1}. \quad (59)$$

Aus (59) findet man durch Mittelwertbildung im Intervall von 0 bis d :

$$\frac{d \Sigma_M \bar{\varphi}^M}{2a \Sigma_B \varphi(0)} = \frac{d \Sigma_M}{2a \Sigma_B} + \frac{\frac{d}{2L_M} \sin \frac{d}{L_M}}{\mathfrak{Cof} \frac{d}{L_M} - 1} - 1, \quad (60)$$

wo $\bar{\varphi}^M$ der Mittelwert im Moderator der Zelle ist und in der Näherung (6) gilt

$$\Sigma_B^{\text{eff}} \varphi(0) = \Sigma_B \bar{\varphi}^B.$$

Setzen wir (60) in (57) ein, so folgt

$$\nu_{\text{WS}}^0 \frac{\Sigma_f}{\Sigma_B} \frac{e^{-\alpha_0^2 \tau}}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} = \frac{d \Sigma_M \bar{\varphi}^M}{2a \Sigma_B \bar{\varphi}^B} + \frac{1}{1 + \alpha_0^2 L_M^2}. \quad (61)$$

Damit haben wir die bekannte kritische Gleichung der WIGNER–SEITZ-Methode gewonnen. Definieren wir nämlich noch die thermische Ausnutzung f_{WS} :

$$f_{\text{WS}} = \frac{1}{1 + \frac{d \Sigma_M \bar{\varphi}^M}{2a \Sigma_B \bar{\varphi}^B}} \quad (62)$$

(unter Σ_B ist hier der reine Materialwert und nicht der Effektivwert zu verstehen), so erhalten wir aus (61) mit (62):

$$\nu_{\text{WS}}^0 \frac{\Sigma_f}{\Sigma_B} f_{\text{WS}} \frac{e^{-\alpha_0^2 \tau}}{1 + \alpha_0^2 L_{\text{WS}}^2} = 1 \quad (63)$$

mit $L_{\text{WS}}^2 = L_M^2 (1 - f_{\text{WS}})$,

der mittleren Diffusionslänge des Piles.

Das Bemerkenswerte an der WIGNER–SEITZ-Methode ist, daß sie die geometrieunabhängigen Gli-

der (α_0 !) in (49) sämtlich berücksichtigt und damit Glieder der Ordnung $(d/L_M)^2$ noch enthält, da die geometrieabhängigen Glieder erst mit $(d/L_M)^4$ beginnen. Durch Vergleich durch (58) mit (49) folgt die Fehlerformel:

$$\nu_0 = \nu_{\text{WS}}^0 + \frac{1}{240} \left(\frac{d}{L_M} \right)^4 \alpha_0^2 L_M^2 e^{\alpha_0^2 \tau} \left(1 + \alpha_0^2 L_M^2 \right) \frac{\Sigma_B}{\Sigma_f} + \dots \left(\frac{4\pi^2 \tau}{d^2} \gg 1 \right). \quad (64)$$

Gehen wir nun noch einen Schritt weiter und verlangen außer $2l \gg d$, $4\pi^2 \tau/d^2 \gg 1$ auch noch $4\pi^2 L_M^2/d^2 \gg 1$, so können wir die in (53) noch verbliebene Reihe weglassen und erhalten die „homogene“ Näherung:

$$\Phi_{\text{homo}}^{(0)}(x) = \cos \frac{\pi x}{2l} \left\{ \frac{2a}{d \Sigma_M} \frac{\nu_0 \Sigma_f e^{-\alpha_0^2 \tau} - \Sigma_B}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} \right\} \quad (65)$$

$$\left(2l \gg d; \frac{4\pi^2 \tau}{d^2} \gg 1; \frac{4\pi^2 L_M^2}{d^2} \gg 1 \right).$$

Die „homogene“ Näherung der kritischen Gleichung erhalten wir wieder aus

$$\Phi_{\text{homo}}^{(0)}(0) = 1 \quad \text{zu}$$

$$\nu_{\text{homo}}^0 \frac{\Sigma_f}{\Sigma_B} \frac{e^{-\alpha_0^2 \tau}}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} = \frac{d \Sigma_M}{2a \Sigma_B} + \frac{1}{1 + \alpha_0^2 L_M^2}. \quad (66)$$

In diesem Fall ist die thermische Ausnutzung gegeben durch:

$$f_{\text{homo}} = \frac{1}{1 + \frac{d \Sigma_M}{2a \Sigma_B}} \quad (67)$$

und analog zu (63) erhalten wir:

$$\nu_{\text{homo}}^0 \frac{\Sigma_f}{\Sigma_B} f_{\text{homo}} \frac{e^{-\alpha_0^2 \tau}}{1 + \alpha_0^2 L_M^2} = 1 \quad (68)$$

mit $L_{\text{homo}}^2 = L_M^2 (1 - f_{\text{homo}})$.

Durch Vergleich mit (66) mit (49) folgt die Fehlerformel:

$$\begin{aligned} \nu^0 &= \nu_{\text{homo}}^0 + \frac{1}{12} \left(\frac{d}{L_M} \right) e^{\alpha_0^2 \tau} (1 + \alpha_0^2 L_M^2) \frac{\Sigma_B}{\Sigma_f} \\ &\quad + \dots \left(\frac{4\pi^2 \tau}{d^2} \gg 1 \right). \end{aligned} \quad (69)$$

Nachdem so ein allgemeiner Überblick über den Zusammenhang der verschiedenen Näherungsmethoden gewonnen wurde, wollen wir zwei Beispiele betrachten. Wir behandeln in jedem Fall Uranschichten in schwerem Wasser, wobei zu bemerken ist, daß die FERMI-AGE-Theorie in diesem Fall nur eine schlechte Näherung des Bremsvorganges liefert. Im schweren Wasser ist $\tau = 120 \text{ cm}^2$ und $L_M^2 = 10^4 \text{ cm}^2$. Die Materialwerte für natürliches Uran sind:

$$\Sigma_f = 0,189 \text{ cm}^{-1}, \quad \Sigma_B = 0,358 \text{ cm}^{-1}.$$

Da wir in beiden Beispielen Schichten von $2a = 3 \text{ cm}$ Dicke einsetzen, ergeben sich nach (6) folgende Effektivwerte:

$$\Sigma_f^{\text{eff}} = 0,226 \text{ cm}^{-1} \quad \text{und} \quad \Sigma_B^{\text{eff}} = 0,429 \text{ cm}^{-1}.$$

Im ersten Beispiel nun betrachten wir $2N+1 = 15$ Schichten in $d = 15 \text{ cm}$ Abstand, was ungefähr dem Schnitt durch einen normalen Pile mit natürlichem Uran und schwerem Wasser entspricht. Im zweiten Beispiel nehmen wir lediglich $2N+1 = 3$ Schichten in $d = 30 \text{ cm}$ Abstand. Wir erhalten für den tiefsten Eigenwert in den verschiedenen Näherungen:

Beispiel 1	Beispiel 2
$2N+1 = 15$,	$2N+1 = 3$,
$d = 15 \text{ cm}$,	$d = 30 \text{ cm}$,
$\nu_0^{\text{het}} = 1,95484$,	$\nu_0^{\text{het}} = 2,47157$,
$\nu_0^{\text{WS}} = 1,95482$,	$\nu_0^{\text{WS}} = 2,46249$,
$\nu_0^{\text{homo}} = 1,94410$,	$\nu_0^{\text{homo}} = 2,24603$,
	$\nu_0^{\text{het}} = 2,47481$.

Im zweiten Fall muß man in der Exponentialreihe in (47) bereits 3 Glieder mitnehmen, da hier nicht mehr gilt $4\pi^2 \tau/d^2 \gg 1$. Der Wert ν_0^{het} ergibt sich, wenn man nur das Glied mit $\exp(-\alpha_0^2 \tau)$ berück-

sichtigt. Er liegt um $0,32 \cdot 10^{-2}$ zu hoch. Die zweite Anordnung wird also gerade noch kritisch, da pro Spaltung im natürlichen Uran $\nu = 2,5$ Neutronen entstehen.

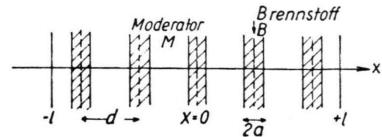


Abb. 1. Schichtung des ebenen Piles.

In der folgenden Tabelle sind die Fehlerglieder in den Formeln (64) und (69) mit dem absoluten Fehler verglichen.

Beispiel	1	2
$\nu'_0 - \nu_0^{\text{WS}}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1,23 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{240} \left(\frac{d}{L_M} \right)^4 \alpha_0^2 L_M^2 \dots$	$2,35 \cdot 10^{-5}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$
$\nu'_0 - \nu_0^{\text{homo}}$	$1,074 \cdot 10^{-2}$	$22,9 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{12} \left(\frac{d}{L_M} \right)^4 \dots$	$1,072 \cdot 10^{-2}$	$21,7 \cdot 10^{-2}$

Hier muß man die Werte ν_0^{het} einsetzen, da das Fehlerglied die Differenz zu diesem Wert mißt. Man sollte nun verlangen, daß der absolute Fehler in $\nu < 10^{-3}$ ist, denn dann liegt der Fehler in der Überschußreakтивität $2,5 - \nu_0$ unter 1%. So betrachtet liefert im Beispiel 1 die WS-Methode noch eine vor-

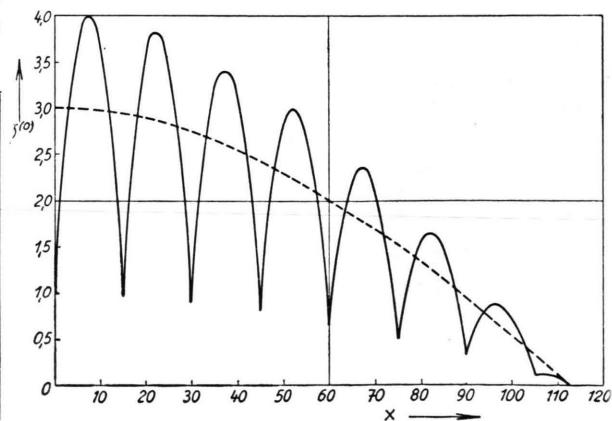


Abb. 2. Verlauf des thermischen Neutronenfluxes und der homogenen Näherung in einem ebenen Pile mit 15 Schichten.
— Eigenfunktion $\tilde{\Phi}^{(0)}(x)$ zum tiefsten Eigenwert ν^0 ;
- - - approximierende homogene Funktion $\tilde{\Phi}_{\text{homo}}^{(0)}$;
 $d = 15 \text{ cm}; 2l = 225 \text{ cm}; 2N+1 = 15$.

zügliche Näherung, die homogene Methode dagegen schon nicht mehr. Im Beispiel 2 sind beide Methoden unzureichend.

In den Abb. 2 und 3 sind für das Beispiel 1 aufgetragen die Eigenfunktion $\Phi^{(0)}$ und die Näherung $\Phi_{\text{WS}}^{(0)}$ und $\Phi_{\text{homo}}^{(0)}$. Dabei sind $\Phi_{\text{WS}}^{(0)}$ und $\Phi_{\text{homo}}^{(0)}$ so normiert, daß sie die Funktion $\Phi^{(0)}(x)$ mit $\Phi^{(0)}(0) = 1$ approximieren. Man erhält sie, indem man in (51) bzw. (65) den genauen Eigenwert ν_0^{het} einsetzt. Abb. 4 zeigt die entsprechenden Funktionen für das zweite Beispiel. Wir sehen, daß $\Phi^{(0)}$ in Zellen, die vom Rande des Piles weiter entfernt liegen, sehr gut durch $\Phi_{\text{WS}}^{(0)}$ approximiert wird, sogar noch im Beispiel 2. In den Randzellen dagegen treten merkliche Abweichungen auf.

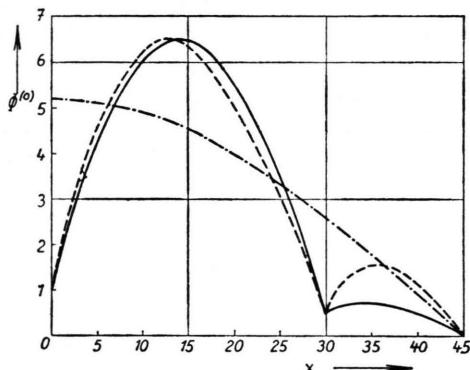


Abb. 3. Abweichung der WIGNER-SEITZ-Näherung von der exakten Flußverteilung am Rande des Piles. —— Eigenfunktion $\Phi^{(0)}(x)$ zum tiefsten Eigenwert ν^0 ; - - - approximierende WIGNER-SEITZ-Funktion $\Phi_{\text{WS}}^{(0)}(x)$; - · - - approximierende „homogene“ Funktion $\Phi_{(0)}^{\text{homo}}(x)$. $d=15 \text{ cm}$; $2 l=225 \text{ cm}$; $2 N+1=15$.

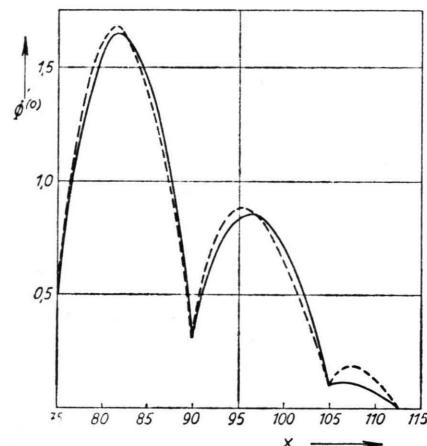


Abb. 4. Flußverlauf und Näherungen in einem ebenen Pile mit 3 Schichten. —— Eigenfunktionen $\Phi^{(0)}(x)$ zum tiefsten Eigenwert ν^0 ; - - - approximierende WIGNER-SEITZ-Funktion $\Phi_{\text{WS}}^{(0)}(x)$; - · - - approximierende „homogene“ Funktion $\Phi_{(0)}^{\text{homo}}(x)$. $d=30 \text{ cm}$; $2 l=90 \text{ cm}$; $2 N+1=3$.

Fassen wir zum Abschluß noch einmal zusammen:

1. Die WIGNER-SEITZ-Methode ist anwendbar, falls $4 \pi^2 \tau / d^2 \gg 1$ und $2 N+1 \gg 1$.

Sie liefert in den vom Rande entfernten Zonen den genauen Flußverlauf.

2. Die homogene Methode kann angewendet werden, falls

$$4 \pi^2 \tau / d^2 \gg 1; 4 \pi^2 L_M / d^2 \gg 1 \text{ und } 2 N+1 \gg 1.$$

Ihrer Natur nach stellt sie nur den über die Zelle gemittelten Flußverlauf dar.

Die Fehlerglieder für die Approximation des Eigenwertes werden dabei durch (64) und (69) geliefert.